制御工学 演習問題４ 解答例（2020/05/11）

(1) 1次遅れ系のステップ応答

① ステップ応答のラプラス変換は，

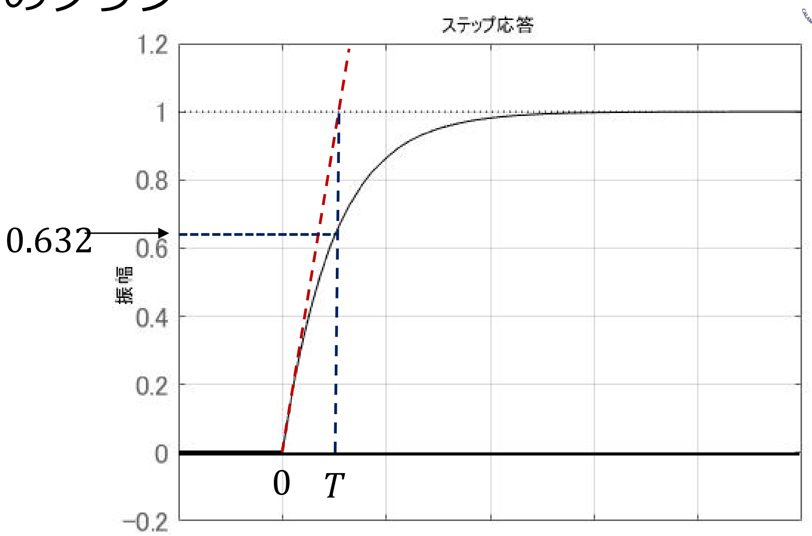
$$f(s)=G(s)u_s(s)=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\dfrac{1}{T}}$$

となり，これを逆ラプラス変換するとステップ応答は次式のようになります。

$$f(t)=L^{-1}\left[f(s)\right]=\left(1-e^{-\frac{1}{T}t}\right)u_s(t)$$

② ステップ応答のグラフ

$$f(t)=\left(1-e^{-\frac{1}{T}t}\right)u_s(t)$$



作図のポイント

- <u>定規を使って</u>，図をていねいに書くこと
- 横軸，縦軸，原点を記入すること
- 最終値が1になっていること，
- 時定数 T が書かれていること

③ 時定数 T とは，ステップ応答の値が定常値（最終値）の 63.2% に達する時間のことです。すなわち，

$$f(T) = \left(1 - e^{-\frac{1}{T}T}\right) u_s(t) = 1 - e^{-1} \approx 0.632$$

④ 原点でステップ応答関数 $f(t)$の 接線を引き，それが最終値（この場合は 1）と交わる点での時刻が，時定数 T です。この様子をステップ応答の図に書き込みました。

　つぎに数式による説明です。ステップ応答関数の微分は，

$$f'(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t}$$

なので，原点における傾きが $f'(0) = \frac{1}{T}$ の直線 $y = \frac{1}{T} t$ が得られます。この直線が $y = 1$ になるとき，$t = T$ が得られます

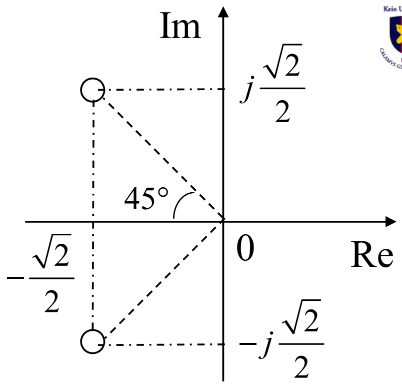
(2)　①　つぎの方程式を解くと，

$$s^2 + \sqrt{2}\, s + 1 = 0$$

極は

$$s = \frac{-\sqrt{2} \pm j\sqrt{2}}{2}$$

となり，その配置を図示しました。
このような極配置を，
バターワース極配置といいます。



②　つぎの恒等式より，$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \sqrt{2}\, s + 1$

$$\omega_n = 1, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

③　伝達関数の逆ラプラス変換がインパルス応答なので前回と同様に平方完成を用いて，伝達関数を変形すると

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}=\frac{1}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

となり，これを逆ラプラス変換すると，

$$g(t)=L^{-1}\left[G(s)\right]=\sqrt{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\cdot u_s(t)$$

(3)　オーバーシュートとは，ステップ応答が目標値を超えて最大値をとることを言い，その最大値をオーバーシュート量，そのときの時間をオーバーシュート時間といいます。２次遅れ要素では，減衰比 ζ の値が $0<\zeta<1$ のときにオーバーシュートが生じます。

KEIO UNIV Adachi Lab. MODELING AND CONTROL

演習問題のまとめ

- 今回の演習問題は分量が多かったので，大変だったと思います。
- 45～60分の時間あるので，じっくりと考えて解答するようにしてください。
- 数式や図面をていねいに書くことを心がけてください。
- ノートは自分が理解できれば OK ですが，答案やレポートは他人が読むものであることに注意しましょう。
- 1次遅れ要素と2次遅れ要素は，制御工学の基本要素なので，しっかりと理解しましょう。

KEIO UNIV Adachi Lab. MODELING AND CONTROL