

制御工学同演習 第8回 演習問題 解答例

1. (1)

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$$G(s) = \mathbf{c}^\top (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned} \quad (3)$$

(2) (3) 式より, $G(s)$ の極は, $s = -1, -2$ である. \mathbf{A} の固有値 λ は,

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad (4)$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0, \quad (5)$$

$$\lambda = -1, -2 \quad (6)$$

である. よって, \mathbf{A} の固有値と $G(s)$ の極は等しいことが確認できた.

(3)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし, $u_s(t)$ は単位ステップ信号である.

2. (1)

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{9}$$

(2,2) 要素は, $\frac{s}{s^2+4s+5}$ である.

(2) $e^{\mathbf{A}t}$ の (2,2) 要素は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 4s + 5} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} - 2 \cdot \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \right], \\ &= e^{-2t}(\cos t - 2 \sin t)u_s(t).\end{aligned}\tag{10}$$