

2021年5月10日(月)

制御工学同演習 第10回 演習問題 解答例

1. (1) フィードバックシステムの伝達関数は $G(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ なので, 特性方程式は,

$$1 + L(s) = 0 \quad (1)$$

すなわち,

$$s^2 + as + b + 1 = 0 \quad (2)$$

(2) (2) 式を解くと, 特性根は,

$$s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b+1)}}{2} \quad (3)$$

である.

(I) $a^2 - 4(b+1) < 0$ のとき, $a > 0$ なので, 特性根の実部は負である.

(II) $a^2 - 4(b+1) \geq 0$ のとき, $a > 0, b > 0$ より $a > \sqrt{a^2 - 4(b+1)} > 0$ なので, 特性根は負である.

したがって, このフィードバックシステムは安定である.

2. (1)

$$L(s) = P(s)C(s) \quad (4)$$

$$= \frac{K}{(s+1)(10s+1)(0.1s+1)} \quad (5)$$

$$= \frac{K}{s^3 + 11.1s^2 + 11.1s + 1} \quad (6)$$

(2) 特性方程式は, $1 + L(s) = 0$ より,

$$s^3 + 11.1s^2 + 11.1s + 1 + K = 0 \quad (7)$$

である. ラウス表を作成すると,

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 11.1 \\
s^2 & 11.1 & 1+K \\
\hline
s^1 & \frac{11.1^2-(1+K)}{11.1} & \\
s^0 & 1+K &
\end{array}$$

となるので, このフィードバックシステムが安定であるための条件は,

$$\begin{cases} \frac{11.1^2-(1+K)}{11.1} > 0 \\ 1+K > 0 \end{cases} \quad (8)$$

すなわち,

$$-1 < K < 122.21 \quad (9)$$

である. いま, $K > 0$ なので, システムが安定になるような K の範囲は,

$$0 < K < 122.21 \quad (10)$$

[別解]

$$L(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + 1)(10j\omega + 1)(0.1j\omega + 1)} \quad (11)$$

$$= \frac{K}{1 - 11.1\omega^2 + j\omega(11.1 - \omega^2)} \quad (12)$$

$L(j\omega)$ の位相交差周波数を ω_π とする. $\text{Im}[L(j\omega_\pi)] = 0$ より, ω_π は

$$\omega_\pi(11.1 - \omega_\pi^2) = 0 \quad (13)$$

を満たす. $\omega = 0$ のとき $\angle L(j0) = \angle K = 0$ なので, $\omega_\pi \neq 0$ となる解を選ぶと,

$$\omega_\pi = \sqrt{11.1} \quad (14)$$

となる. システムが安定であるための条件は,

$$|L(j\omega_\pi)| = \left| \frac{K}{1 - 11.1 \times (\sqrt{11.1})^2} \right| = \left| \frac{K}{122.21} \right| < 1 \quad (15)$$

である. $K > 0$ なので, システムが安定になるような K の範囲は,

$$0 < K < 122.21 \quad (16)$$

(3) 2. (2) より, このフィードバックシステムが安定限界のときの K は,

$$K = 122.21 \quad (17)$$

(4) 安定限界のとき, このフィードバックシステムは持続振動する. 持続振動周波数 ω_π は, $\text{Im}[L(j\omega_\pi)] = 0$ より, $\omega_\pi = \sqrt{11.1}$ である.

(5)

