

UKFによる未知非線形アクチュエータにより駆動される非線形システムの同時推定

服部泰治 足立修一（慶應義塾大学）

Simultaneous estimation of nonlinear systems driven by unknown nonlinear actuator using Unscented Kalman Filter (UKF)

Y. Hattori and S. Adachi (Keio University)

Abstract— In this study, it is considered to estimate state of a known nonlinear plant with input from an unknown nonlinear actuator. To estimate nonlinear systems, a mathematical model which accurately describes the system is required. So, it is necessary to take into account the unknown nonlinearity of the actuator. We propose an estimation method of state and input from the unknown actuator using dual estimation by UKF (Unscented Kalman Filter). Using this method, we can treat the unknown nonlinearity as estimation problem of unknown parameters. Effectiveness of the proposed method is shown by numerical experiments.

Key Words: Nonlinear system, state estimation, Unscented Kalman Filter, simultaneous estimation.

1 はじめに

従来、非線形システムの状態推定法として、拡張カルマンフィルタ (EKF: Extended Kalman Filter) が広く用いられてきた。EKFは非線形システムの一次近似に基づく方法であり、ヤコビアンを計算しなければならない、不連続系に適用できない、そして推定値が発散する場合があるといった問題点を有していた。これらの問題点に対処するために、1990年代半ばに Julierらは、非線形システムを線形近似することなく、確率分布を近似する新しいフィルタを提案し、UKF (Unscented Kalman Filter) と名づけた^[1]。UKFは、機械学習の分野で適用が始められ、EKFよりもよい推定結果を与える非線形フィルタとして、近年、さまざまな分野で注目を集めている^[2]。

UKFの提案によって、現実問題に適用できる可能性が増した例の一つとして、状態と未知パラメータを同時に推定する同時推定が挙げられる^{[3][4]}。本研究では、Fig.1に示すように制御対象とアクチュエータが直列に接続されているシステムを対象とする。このシステムは、Hammersteinモデルと異なり、アクチュエータだけでなく、動特性にも非線形性を含む。このシステムに対し、既知の動的非線形性をもつ制御対象の状態と、未知の静的非線形性をもつアクチュエータからの入力をUKFにより同時推定する方法を提案する。UKFに限らず、状態推定法では、システム全体を正確に記述する数学モデルを必要とするため、未知の非線形性 $A(\cdot)$ に何らかの対処をする必要がある。この問題に対し、提案法を用いれば、未知の非線形性という問題を未知パ

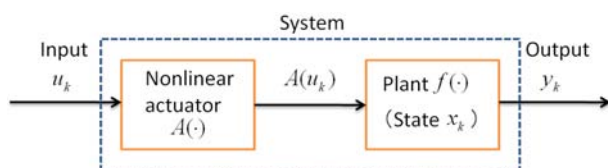


Fig. 1: Nonlinear system with an actuator which has an unknown static nonlinearity $A(\cdot)$

ラメータの推定問題として扱うことができる。

本報告の構成は以下の通りである。2節でUKFによる非線形システムの状態推定について説明し、3節でUKFによる未知非線形アクチュエータにより駆動される非線形システムの同時推定法を提案する。4節では数値実験例を通して、提案法の有効性を示す。

2 UKFによる非線形システムの状態推定

本報告では、対象は離散時間非線形状態空間表現

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) + \mathbf{v}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

により記述されるとする。ただし、 \mathbf{x} は n 次元の状態、 \mathbf{u} は入力、 \mathbf{y} は出力である。 \mathbf{v} はプロセス雑音(平均値0, 共分散行列 \mathbf{Q})、 \mathbf{w} は観測雑音(平均値0, 共分散行列 \mathbf{R})であり、ともに加法的に加わるとする。また、 \mathbf{f} 、 \mathbf{h} は非線形関数である。

本報告では、UKFによる逐次状態推定を行うので、基本的なUKFの逐次式を以下にまとめておこう。

UKF アルゴリズム

1. シグマポイント $\mathcal{X}_i, \{i = 0, \dots, 2n + 1\}$ を以下に示すように決定する。

$$\mathcal{X}_{0, k-1|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (3)$$

$$\mathcal{X}_{i, k-1|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\mathcal{X}_{i, k-1|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)_i \quad i = n + 1, \dots, 2n + 1 \quad (5)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ は時刻 k における状態の事後推定値であり、 $\mathbf{P}_{k|k}$ は状態の事後共分散行列である。 κ はスケールパラメータであり、 $\left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}_{k-1|k-1}} \right)_i$ は行列 $(n + \kappa) \mathbf{P}_{k-1|k-1}$ の行列平方根 \mathbf{L}

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = (n + \kappa) \mathbf{P}_{k-1|k-1} \quad (6)$$

の i 番目の行成分である．ここで，(6) 式はコレスキー分解または特異値分解を用いて計算される．また，シグマポイントに対する重みの与え方の一例として，重みを

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} \quad (7)$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \quad (8)$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i \neq 0 \quad (9)$$

で与えることができる．ただし，上添字 (m) と (c) はそれぞれ平均と分散に対する重みであることを示している．また， $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$ のように λ は決定される．

2. 時間更新

$$\mathcal{X}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k) \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k|k-1} \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \cdot (\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{Q} \quad (12)$$

$$\mathcal{Y}_{k|k-1} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_{k|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k) \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{Y}_{i,k|k-1} \quad (14)$$

ただし， $\hat{\mathbf{y}}$ は観測値の推定値を示している．

3. 観測値更新

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \cdot (\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T + \mathbf{R} \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \cdot (\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k}^{-1} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (19)$$

なお，雑音が加法的に混入しない場合は，雑音を状態ベクトルに含め，拡大系を構成して上記アルゴリズムに適用すればよい．その場合は，(12) 式から \mathbf{Q} を，(15) 式から \mathbf{R} をそれぞれ除く．UKF の利点の一つに，プロセス雑音，観測雑音共に状態ベクトルに含め，雑音の共分散もアルゴリズム内で推定できることがある．しかしながら，雑音を加法的に扱う際には必ずしも雑音を状態ベクトルに含める必要がない．雑音を拡大系に含めるかどうかの議論は [5] でなされており，拡大系を用いた方が推定精度がよいことが報告されている．一方，

拡大系を用いた方が計算時間がかかることも事実であり，実際に UKF を用いる際には注意が必要である．

また，シグマポイントは確率的に選ばれるわけではなく確定的に選ばれるが，その選び方は一意ではない．前述のシグマポイントの選び方はもっとも標準的なもので，より低次元のシグマポイントの選び方も提案されている [6] ．

3 UKF による未知非線形アクチュエータにより駆動される非線形システムの同時推定

3.1 同時推定

プラントの状態と未知パラメータを同時に推定する方法を同時推定と呼ぶ．同時推定を行うために，状態ベクトル \mathbf{x}_k に未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を含めて拡大状態ベクトル

$$\mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

を構成し，推定アルゴリズムに適用する．同時推定は最大事後推定に基づいているので，これについて以下で簡潔に説明する．

逐次状態推定は損失関数を逐次的に最小化するように \mathbf{x}_k を決定する最適化アルゴリズムとして捉えることができる．状態推定の場合の損失関数は，

$$J(\mathbf{x}_1^k) = \sum_{t=1}^k \{ [\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\mathbf{x}_t)]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\mathbf{x}_t)] + (\mathbf{x}_t - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}))^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x}_t - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1})) \} \quad (21)$$

である [7] ．(21) 式において右辺第 1 項は，推定誤差の重み付き共分散を，第 2 項は予測誤差の重み付き共分散を表しており，両者とも確率密度関数をガウシアンと仮定した際に導かれるものである．

$\{\mathbf{y}_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ を \mathbf{y}_1^N のように表記すると，観測データ \mathbf{y}_1^N が与えられたときの状態 \mathbf{x}_1^N とパラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の結合確率密度関数 $p(\mathbf{x}_1^N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_1^N)$ は，ベイズの定理により，

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1^N, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_1^N) &= \frac{p(\mathbf{y}_1^N | \mathbf{x}_1^N, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{x}_1^N, \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y}_1^N)} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_1^N | \mathbf{x}_1^N, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{x}_1^N | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y}_1^N)} \quad (22) \end{aligned}$$

で記述できる．事前確率密度関数 $p(\mathbf{y}_1^N)$ は， \mathbf{x}_1^N ，および $\boldsymbol{\theta}$ とは独立であり，パラメータを未知とすれば，確率密度関数 $p(\boldsymbol{\theta})$ に対する情報は利用できないので，最大事後確率を求めるためには，

$$p(\mathbf{y}_1^N, \mathbf{x}_1^N | \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}_1^N | \mathbf{x}_1^N, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{x}_1^N | \boldsymbol{\theta}) \quad (23)$$

が最大になるところを見つければよい．確率密度関数があらゆる時刻でガウシアンであると仮定すると，

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_1^N | \mathbf{x}_1^N, \boldsymbol{\theta}) &\propto \\ &\exp \left[- \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta})] \right] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1^N | \boldsymbol{\theta}) &\propto \\ &\exp \left[- \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\theta})] \right] \quad (25) \end{aligned}$$

が成り立つので、結合確率密度 $p(\mathbf{y}_1^N, \mathbf{x}_1^N | \theta)$ の対数を取れば、最大事後確率を与えるのは、評価関数

$$J(\mathbf{x}_1^N, \theta) = \sum_{k=1}^N \{ [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \theta)]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \theta)] + (\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta))^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \theta)) \} \quad (26)$$

を最小にするような \mathbf{x}_1^N, θ の組となる。(26) 式は (21) 式と同様の形をしていることから、未知パラメータを状態に含めた拡大状態ベクトル (20) 式を状態推定アルゴリズムに適用すれば同時推定が行える。

3.2 未知の静的非線形性の関数近似

Fig. 1 に示した未知の静的非線形性に対処するために、Fig. 2 に示すように実験的にいくつかの動作点で非線形関数値を求め、その離散点間を線形補間する方法が使われることが多い。これは自動車産業などをはじめとしてさまざまな応用分野で非線形性に対処する方法として利用されており、テーブル（あるいはマップ）と呼ばれている。この方法（以下、従来法）では、システムにモデル化誤差が含まれる場合や、アクチュエータの特性が変化した場合、このテーブルのチューニングにかなりの労力がかかるという問題があった。本報告では、 $A(u)$ を関数近似し、そのパラメータを決定することでアクチュエータからの入力を近似する方法を提案する。たとえば、 $A(u)$ がテイラー展開できるとして、

$$A(u_k) = a_0 + a_1 u_k + a_2 u_k^2 + a_3 u_k^3 + \dots \quad (27)$$

と表す。(27) 式を任意の次数で打ち切ることによってアクチュエータを関数近似することができれば、アクチュエータからの入力 $A(u_k)$ を得ることができる。そこで、 $a_i, i = 0, 1, 2, \dots$ を未知パラメータとおき、同時推定を適用する。このとき、推定アルゴリズムとしては UKF を用いる。

この方法を用いれば、モデル化誤差やアクチュエータの変動があっても状態を適応推定できる。この方法の特徴の一つは、 $A(u_k)$ を決定する際に、ある種の事前情報が生かせることである。たとえば、前述の例ではテイラー級数型を仮定したが、非線形性が偶関数であることが既知の場合、奇数次の項は用いる必要がない。しかし、状態ベクトルの次数を増やせばその分だけ

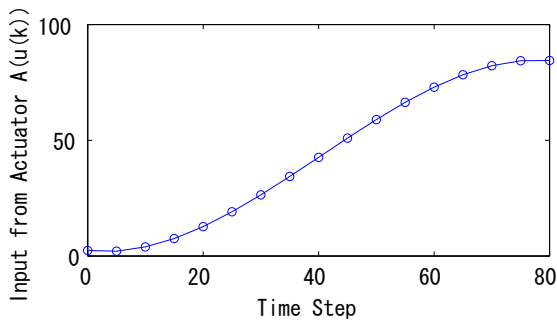


Fig. 2: Static nonlinearity of actuator : $\circ \dots$ discrete point predetermined by experiment, solid line \dots linear interpolation

推定アルゴリズムの計算時間が増加するので、できるだけ低次で用いるべきである。

提案法の手順を以下にまとめる。

提案法の手順

- Step 1 たとえば、(27) 式を用いてアクチュエータを近似する数式構造を決める。
- Step 2 数式構造に含まれるパラメータを状態ベクトルに含め、拡大状態ベクトルを構成する。
- Step 3 UKF アルゴリズム (3)~(19) 式を適用し、同時推定を行う。

4 数値実験例

状態空間形式

$$x_{k+1} = x_k + \sqrt{\left(\frac{x_k}{1000}\right)^{10/7} - \left(\frac{x_k}{1000}\right)^{11/7}} + 0.01A(u_k) \quad (28)$$

$$y_k = x_k + w_k \quad (29)$$

で記述される 1 入力 1 出力 1 状態の非線形システムを考える。 w_k は $\mathcal{N}(0, 2000)$ にしたがう正規性白色の観測雑音である。(28) 式は、流体の先細ノズル流れの表現を模擬しているが、例題用に簡単化した。また、アクチュエータの非線形性を、

$$A(u(k)) = 2.4 - 0.2945u_k + 0.0485u_k^2 - 0.0004u_k^3 \quad (30)$$

で与えた。これは Fig. 2 に与えたアクチュエータの例と同じものである。この非線形性に対処するため、(30) 式に 5 刻みで離散点を得て線形補間したもの (Fig. 2) と、提案法により、(27) 式を 3 次で打ち切ったものを用い、両者を比較した。また、状態推定に利用できる数学モデルは、次式のようにモデル化誤差を含むものとした。

$$x_{k+1} = x_k + 0.1 \sqrt{\left(\frac{x_k}{1000}\right)^{10/7} - \left(\frac{x_k}{1000}\right)^{11/7}} + 0.01A(u_k) \quad (31)$$

シミュレーションは EKF、および UKF を用いて行った。両フィルタの初期値は、従来法の場合、

$$\hat{x}_0 = 1, \quad P_0 = 10$$

で与え、提案法の場合、

$$\hat{x}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$P_0 = \text{diag} [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10]$$

で与えた。シミュレーションは 3000 ステップ行い、そのうち 1000~1200 ステップの結果を Fig. 3 に示した。アクチュエータを線形補間した場合の状態推定値を Fig. 3 (上段) に、アクチュエータを提案法により関数近似した場合の状態推定値を Fig. 3 (下段) に示した。入力を Fig. 4 (上段) に、アクチュエータを線形補間した場合の推定値を Fig. 4 (中段) に、そしてアクチュエータを提案法により関数近似したものを 4 (下段) に示した。

Fig. 3 (上段) には、従来法を用いた場合、モデル化誤差のために推定値に大きな誤差が生じていることが示されている。一方、Fig. 3 (下段) より、提案法では

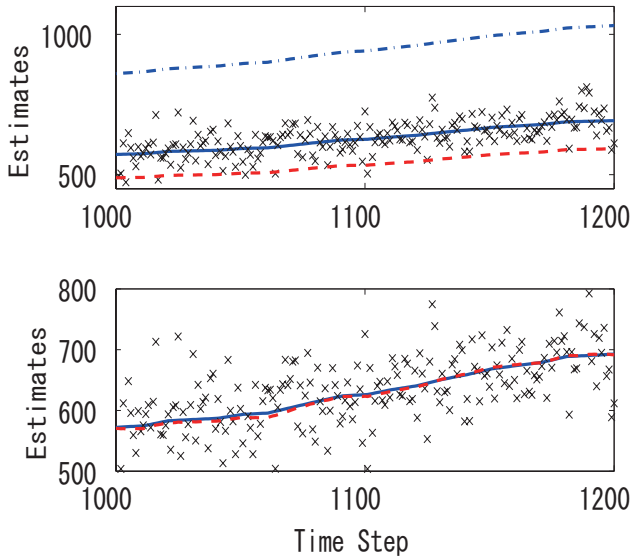


Fig. 3: Result of state estimation. Upper stage shows the result of estimation by linear interpolation and lower stage shows the result of estimation by function approximation. : solid line ... true, break line ... state estimation (UKF), dashed-dotted line ... state estimation (EKF), x-marks ... noisy observation

Table 1: Comparison of RMS between the conventional method and the proposed method

	RMS
conventional (EKF)	370.3
conventional (UKF)	88.0
proposed	15.1

精度よく状態が推定されている（なお、図では真値と推定値がほとんど重なっている）。また、提案法においてUKFの代わりにEKFを用いた場合、発散してしまい推定できなかった。推定精度を比較するため

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \hat{x}_k)^2} \quad (32)$$

で推定精度を評価した結果を Table 1 に示した。表は 10 回のシミュレーションの平均をとったものである。表より、この例題の場合には提案法は従来法 (UKF) に比べて 5.8 倍ほど推定精度がよいという結果になった。提案法による関数近似の値は、

$$A(u_k) = -2.381 + 1.830u_k - 0.0303u_k^2 + 0.0004u_k^3 \quad (33)$$

となり、(30) 式と比較すると、提案法は関数近似を行っているとはいえない。これは Fig. 4 (下段) のように、アクチュエータからの入力を多く見積もり、非線形動特性部のモデル化誤差を埋めているためである。提案法を用いれば、モデル化誤差をアクチュエータ部分に吸収させて状態推定ができる。一方、従来法は Fig. 4 (中段) のようにアクチュエータを精度よく表現しているが、Fig. 3 (上段) でみたように、状態推定はできていない。

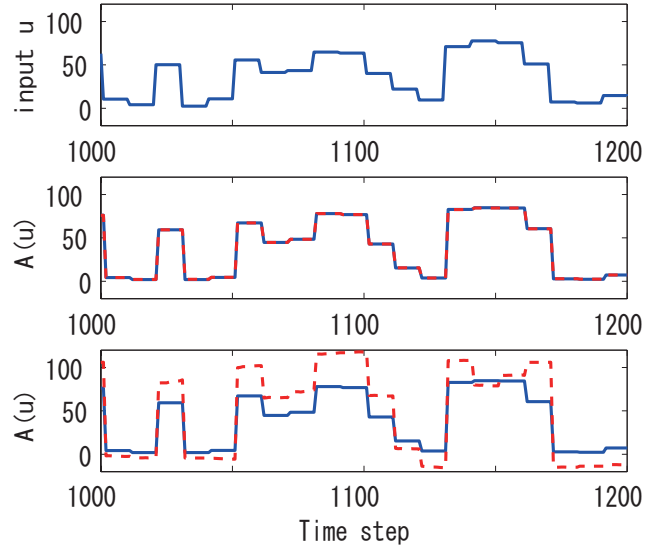


Fig. 4: Input, actuated input $A(u(k))$ and estimated inputs $\hat{A}(u(k))$: upper solid line ... input $u(k)$, middle solid line ... true actuated input $A(u(k))$, middle break line ... estimated input $\hat{A}(u(k))$ by linear interpolation, lower solid line ... true actuated input $A(u(k))$, lower break line ... estimated input $\hat{A}(u(k))$ by proposed method.

5 おわりに

数値シミュレーションにより、未知の静的非線形性をもつアクチュエータからの入力と、それによって駆動されるシステムの状態推定ができることを示した。提案法は、モデル化誤差をアクチュエータ部に吸収させ、状態推定をできるようにするために考案したものである。その有効性をシミュレーションによって示した。今回は加法的な非線形性に対してシミュレーションを行ったが、乗法的な非線形性に対しても同様に行うことができる。今後の課題としては、パラメータの収束性など、提案法を理論的に裏付けることが挙げられる。

参考文献

- [1] S. J. Julier, J. K. Uhlmann and H. F. Durrant-Whyte, "A new approach for filtering nonlinear systems," in the Proceedings of the American Control Conference, pp. 1628–1632, Seattle WA, USA (1995)
- [2] S. Thrun, W. Burgard and D. Fox 著, 上田訳, 確率ロボティクス, 毎日コミュニケーションズ (2007)
- [3] 山北, "UKF (Unscented Kalman Filter) って何?," システム/制御/情報, Vol. 50, No. 7, pp. 261–266 (2006)
- [4] M. Yamakita, Y. Mushi and G. Kinoshita, "Comparative study of simultaneous parameter-state Estimation," Proceeding of the 2004 IEEE International Control Conference on Control Applications Taipei, Taiwan, pp. 1621–1626 (2004)
- [5] Y. Wu and D. Hu, "Unscented Kalman filtering for additive noise case: augmented versus nonaugmented," IEEE Signal Processing Letters, Vol. 12, No. 5, pp. 357–360 (2005)
- [6] S. J. Julier, "The spherical simplex unscented transformation," in the Proceedings of American Control Conference, Denver, pp. 2430–2434 (2003)
- [7] S. Haykin, Kalman Filtering and Neural Networks, John Wiley and Sons, Inc. (2001)