

o p.75 上部

つぎに, $n \geq 1$ について

(p.75)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/3} 2 \cos nt \, dt + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos nt \, dt \right) \rightarrow 2\pi/3$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{2}{n} \sin nt \right]_0^{\pi/3} + \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_{\pi/3}^{2\pi/3} \right)$$

o p.81 中部

3.2.4 フーリエ級数を用いた無限級の和の公式の導出

(p.81)

再び例題 3.1 を考えよう。この例題において, $a = \pi/2$ とおくと, フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} + \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{3} \cos 3t + \dots \right] \quad (3.70)$$

が得られる。この式に $t=0$ を代入すると

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right) \rightarrow \left[\frac{\pi}{4} + \cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \dots \right]$$

が得られる。いま, もとの関数のグラフより明らかなように, $f(0) = 1$ なので

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \frac{\pi}{4} \rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4} \quad (3.71)$$

という無限級数の和の公式が得られる。

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$$

o p.82 上部

[解答]

(1) フーリエ級数展開は次式のようになる。

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \dots \right) \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)t \quad (3.73)$$

(2) 式 (3.73) に $t = \pi/2$ を代入すると, 無限級数の公式

(p.82)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (3.74)$$

あるいは

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{式 (3.71) と同じ結果であり,} \quad (3.75)$$

が得られる。これはライプニッツの公式 (あるいは, マーダヴァ=ライプニッツ級数) として知られている。

o p.208 下部

6 (1) $a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$

(p.208)

(2) $\frac{\pi}{2}$

(3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$ が得られる。これはライプニッツの公式と呼ばれる。

トル