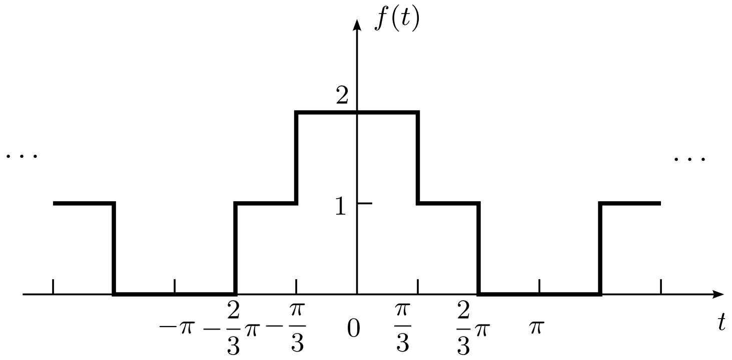
物理情報数学 C　演習問題
2012/11/01

問題

(1)

図に示した周期 2π の周期関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開し，最初の非零の 5 項目までの展開式を求めなさい．

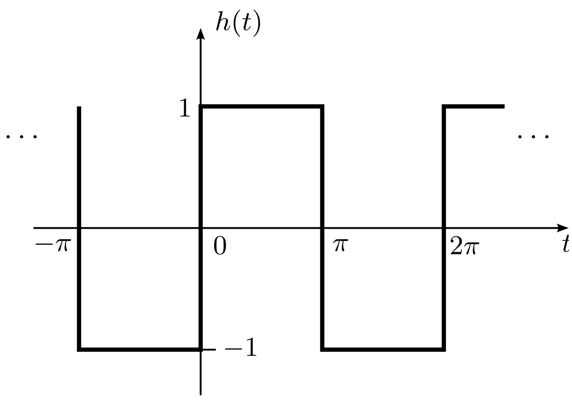


(2)

図に示した周期的な矩形波をフーリエ級数展開しなさい．

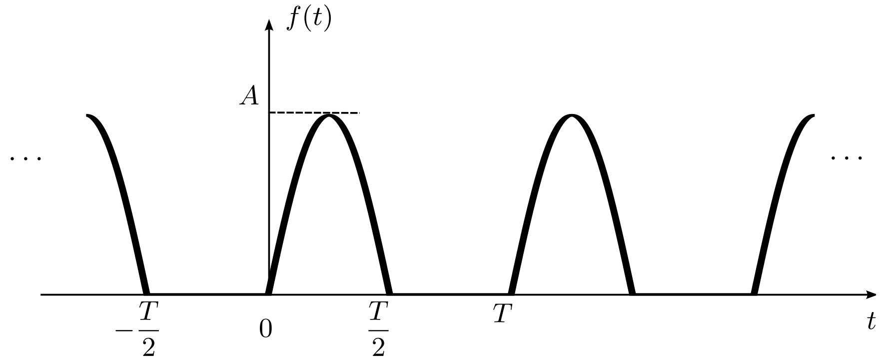
(a)　最初の非零の 3 項までの展開式を書きなさい．

(b)　一般項を書きなさい（$\sum$ を使って）（美しい形で答えてください）．



(3)【宿題】

図示した半波整流された正弦波関数をフーリエ級数展開しなさい．



解答

(1)

関数 $f(t)$ は偶関数なので，フーリエ余弦級数展開できる．すなわち，

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$$
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt$$

と書ける．いま，周期 $T = 2\pi$ なので，$\omega_0 = 1$ であることに注意して計算すると，

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} dt\right) = 2$$

$n \geq 1$ について，

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos nt dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos nt dt\right) \\
=& \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{2}{n}\sin nt\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\right) \\
=& \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{2n\pi}{3}\right) \\
=& \frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$f(t) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos t - \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{7}\cos 7t - \frac{1}{11}\cos 11t + \ldots\right)$$

(2)

関数 $h(t)$ は奇関数なので，フーリエ正弦級数展開できる．すなわち，

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} h(t)\sin n\omega_0 t dt$$

と書ける．いま，周期 $T = 2\pi$ なので，$\omega_0 = 1$ であることに注意して計算すると，$n \geq 1$ について，

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ntdt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & (n : \mathrm{odd}) \\ 0 & (n : \mathrm{even}) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．したがって，

(a)

$$h(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \dots\right)$$

(b)

$$h(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

(3)

関数 $f(t)$ は

$$
f(t) = \begin{cases} 0, & (-\dfrac{T}{2} < t < 0) \\ A\sin\dfrac{2\pi}{T}t, & (0 < t < \dfrac{T}{2}) \end{cases}
$$

と表される．また，$f(t)$ の周期は T より，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ である．

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin\frac{2\pi}{T}tdt \\
&= \frac{2A}{T}\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{2A}{\pi}
\end{aligned}
$$

$n \geq 1$ について，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin\frac{2\pi}{T}t\cos\frac{2n\pi}{T}tdt \\
&= \frac{2A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2(1+n)\pi}{T}t + \sin\frac{2(1-n)\pi}{T}t\right)\right]dt \\
&= -\frac{A}{T}\left[\frac{T}{2(1+n)\pi}\cos\frac{2(1+n)\pi}{T}t + \frac{T}{2(1-n)\pi}\cos\frac{2(1-n)\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{2\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right] \\
&= \frac{A}{2\pi}\left[\frac{1-(-1)^{1+n}}{1+n} + \frac{1-(-1)^{1-n}}{1-n}\right] \\
&= \begin{cases} 0 & (n: \mathrm{odd}) \\ -\dfrac{2A}{\pi}\dfrac{1}{(n+1)(n-1)} & (n: \mathrm{even}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

同様にして，

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin^2\frac{2\pi}{T}tdt \\
&= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left[1-\cos\frac{4\pi}{T}t\right]dt \\
&= \frac{A}{T}\left[t + \frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

$n \geq 2$ について，

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin\frac{2\pi}{T}t\sin\frac{2n\pi}{T}tdt \\
&= -\frac{2A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2(1+n)\pi}{T}t - \cos\frac{2(1-n)\pi}{T}t\right)\right]dt \\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{T}{2(1+n)\pi}\sin\frac{2(1+n)\pi}{T}t + \frac{T}{2(1-n)\pi}\sin\frac{2(1-n)\pi}{T}t\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin\frac{2\pi}{T}t - \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\cos\frac{4n\pi}{T}t \\
&= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin\frac{2\pi}{T}t - \frac{2A}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos\frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos\frac{8\pi}{T}t + \dots\right)
\end{aligned}
$$