制御工学 演習問題８ 解答例（2020/05/25）

(1) 状態空間表現の利点

① システムが何次系であっても，行列やベクトルを係数とした1階微分方程式で記述できる。すなわち，システムの一般的な表現を与えることができる。

② 状態空間表現と伝達関数表現の対応が明確である。

③ 新たに状態変数を導入することにより，システムの内部状態に着目した表現形式が得られる。授業の範囲を超えてしまいますが，このことにより，内部状態を推定するオブザーバやカルマンフィルタが導入でき，さらに状態をフィードバックする状態フィードバック制御が行える。

④ この授業では1入力1出力システムを取り扱っていますが，状態空間表現を用いると，多入力多出力システムへの拡張が容易である。

(2)フィードバック制御の目的

① 制御システムの安定化
   i. 不安定な制御対象を安定にすること
   ii. コントローラを接続することによって，安定な制御対象を不安定にしないこと

② 目標値追従性：できるだけ速く，それほど振動的にならずに，制御量（制御対象の出力）を目標値に追従させること

③ 外乱抑制性：制御対象を乱す外乱（未知の外部入力）が存在しても，その影響を抑制すること

④ ロバスト性：制御対象のモデルの不確かさ（モデル化誤差）に対してロバストであること

(3) ① $G(s) = \boldsymbol{c}^T(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 5 & s+6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+6s+5}\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -5 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+6s+5}$$

② 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = 0$ を解くことにより，$\lambda = -1, -5$ である。一方，伝達関数の極は $s^2+6s+5=0$ を 解くことに より，$s = -1, -5$ で等しい値になります。

③ 状態遷移行列はつぎのように計算できます。

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+6s+5}\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -5 & s\end{bmatrix}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{s+6}{(s+1)(s+5)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+5)}\\ \dfrac{-5}{(s+1)(s+5)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+5)}\end{bmatrix}$$

③ (続き)

$$e^{At} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{5}{s+1}-\dfrac{1}{s+5} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+5}\\ -5\left(\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+5}\right) & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{5}{s+5}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}5e^{-t}-e^{-5t} & e^{-t}-e^{-5t}\\ -5\left(e^{-t}-e^{-5t}\right) & -e^{-t}+5e^{-5t}\end{bmatrix}u_s(t)$$

(4) ①

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+2s+5}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix}$$

なので，$(1,1)$ 要素は， $\dfrac{s+2}{s^2+2s+5}$

② 状態遷移行列の$(1,1)$ 要素はつぎのように計算できます。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1+1}{(s+1)^2+2^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.5\cdot 2}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

$$=\left(e^{-t}\cos 2t+0.5e^{-t}\sin 2t\right)u_s(t)$$

$$=e^{-t}\left(\cos 2t+0.5\sin 2t\right)u_s(t)$$

ポイント：何度も勉強した，2次方程式が複素共役根をもつときの，平方完成を用いた逆ラプラス変換の計算法です

注意：Youtube 講義ビデオについて

ビデオの22分ころで，「代数的に等価なシステム」についてお話ししています。利用する座標変換について，ビデオでは

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$$

として講義していますが，教科書の p.115 から書いてあるように

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$$

とする方が一般的です。

$\boldsymbol{T}$ は正則行列なので，どちらの表記でも問題ありませんが，座標変換については，教科書の表記を勉強してください。