となる．一方，式 (4.18) は次式となる．

$$y(k) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(k) + du(k) \tag{4.45}$$

このとき，離散時間状態方程式と伝達関数の間には，つぎの関係式が成り立つ．

$$G(z) = \boldsymbol{c}^T (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{b} + d \tag{4.46}$$

4.3　スペクトル密度関数を用いた離散時間 LTI システムの表現

図 4.3 に示すように，インパルス応答が $g(k)$ の離散時間 LTI システムに，不規則信号 $u(k)$ を印加すると，出力 $y(k)$ も不規則信号になる．ただし，本節ではサンプリング周期を $T = 1$ と規格化する．

このとき，出力信号 $y(k)$ の自己相関関数は，

$$\phi_y(\tau) = \mathrm{E}[y(k)y(k-\tau)] \tag{4.47}$$

で定義されるが，これは次式のようになる（導出過程は省略）．

$$\phi_y(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} g(m)g(\ell)\phi_u(\tau+\ell-m) \tag{4.48}$$

ウィーナー＝ヒンチンの定理より，この式をフーリエ変換すると，$y(k)$ のパワースペクトル密度関数 $S_y(e^{j\omega})$ は次式のようになる．

$$\begin{aligned} S_y(e^{j\omega}) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} g(m)g(\ell)\phi_u(\tau+\ell-m) \right) e^{-j\tau\omega} \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g(m) \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell)\phi_u(\tau+\ell-m) e^{-j(\tau+\ell-m)\omega} \cdot e^{j\ell\omega} e^{-jm\omega} \end{aligned} \tag{4.49}$$

ここで，$s = \tau + \ell - m$ と変数変換すると，

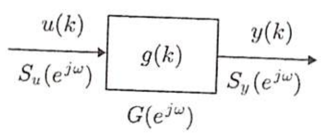

図 4.3　離散時間 LTI システム

システム同定の基礎（6刷）正誤表　(2021/4/30)　足立

$$\begin{aligned} S_y(e^{j\omega}) &= \sum_{m=0}^{\infty} g(m)e^{-jm\omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \phi_u(s)e^{-js\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell)e^{j\ell\omega} \\ &= G(e^{j\omega})S_u(e^{j\omega})G(e^{-j\omega}) = \left|G(e^{j\omega})\right|^2 S_u(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{4.50}$$

が得られる．ただし，$G(e^{j\omega})$ は LTI システムの周波数伝達関数である．

つぎに，入力信号 $u(k)$ と出力信号 $y(k)$ の相互相関関数は，

$$\phi_{uy}(\tau) = \mathrm{E}[u(k)y(k-\tau)] \tag{4.51}$$

$y(k+\tau)$

このマイナスを，プラスに修正

→ $\phi_{uy}(\tau) = \mathrm{E}[u(k)y(k+\tau)]$

で定義されるが，これは次式のようになる（導出過程は省略）．

$$\phi_{uy}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\phi_u(k-\tau) \tag{4.52}$$

この式をフーリエ変換すると，

$$S_{uy}(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})S_u(e^{j\omega}) \tag{4.53}$$

が得られる．以上の結果を次にまとめておく．

✤ Point 4.2 ✤　スペクトル密度関数を用いた離散時間 LTI システムの入出力関係

図 4.3 に示すシステムに対して，つぎの関係式が成り立つ．

$$S_y(e^{j\omega}) = \left|G(e^{j\omega})\right|^2 S_u(e^{j\omega})$$
$$S_{uy}(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})S_u(e^{j\omega})$$

これらの式は，第 6 章で説明するスペクトル解析法と呼ばれるノンパラメトリックモデル同定法において重要となる．

これまでは不規則信号，すなわち定常確率過程を考えてきたが，フィードバック制御システムでは，確定的な信号に確率的な雑音が重畳されたものが測定される場合が多い．このような場合，確定的な部分は予測可能であるが，確率的な部分は不規則に変動する．このような信号を準定常過程（quasi-stationary process）と呼び，その自己相関関数を次式で定義する．

$$\phi_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}[u(k)u(k-\tau)] \tag{4.54}$$

なお，Point 4.2 でまとめた結果は準定常過程に対しても成り立つ．