

論 文

滑らかな入力信号を用いたインパルス応答の同定

正員 足立 修一[†] 准員 伊原木正裕[†] 正員 佐野 昭[†]

Identification of Impulse Response by use of Smooth Input Signals

Shu-ichi ADACHI[†], Member, Masahiro IBARAGI[†], Associate Member
and Akira SANO[†], Member

あらまし 線形離散システムのインパルス応答を同定する方法の中で、逐次最小二乗法は取り扱いの簡単さと収束性の良さから最もよく知られている。しかし、システムへの入力信号が滑らかでデータ数が有限個の場合には、その収束性は必ずしも良くない。本論文では、この収束性の劣化の原因を理論的に解析し、そのような状況においても有効な同定法を提案する。入力信号の滑らかさを表す定量的な指標として、入力信号の相関行列の固有値の大きさを採用し、小さな値の固有値によって最小二乗推定値の平均二乗誤差が増大することを明らかにする。新しい同定法は、適正な個数の小さな固有値を0とおいて打ち切ることにより推定値を求めるもので、最適な打ち切り個数は、固有値、データ数およびSN比などによって決定されることを明らかにする。本手法は、さらにベキ乗法を用いて固有値、固有ベクトルを逐次推定することにより、各時刻における推定値を求める逐次同定法へ拡張される。このとき、前述の最適な打ち切り個数も逐次更新することにより、従来の逐次最小二乗法と比較して極めて優れた収束性をもつことを数値例で明らかにする。

1. ま え が き

線形離散システムのインパルス応答を同定する方法は、今までに数多く提案されているが、その中で逐次最小二乗法は、取り扱いの簡単さと優れた収束性をもっている⁽¹⁾。しかし、同定のためのシステムへの入力信号は白色性信号が最良であることが一般に知られているが、この要請は現実には満たされない場合が多く、例えば、操業中のシステムの入力信号をそのまま利用して同定を行う場合には、入力信号がフィードバック制御などのためにかなり滑らかなものになり、逐次最小二乗法を用いたインパルス応答の推定値の収束性はかなり劣化することが指摘されている⁽²⁾。また、推定値の収束速度という観点からみると、雑音がない場合には、学習的同定法^{(3),(4)}が優れた収束性を示すが、一般に雑音に弱い欠点をもつ。滑らかな有色性を入力信号系列を用い、しかもできるだけ短い、雑音を含む入出力データ系列を用いた有効な同定法については、決定的な方法が知られていないようである。

そこで、本論文では、特異値分解⁽⁵⁾の考えに基づい

て、最小二乗推定値の平均二乗誤差と入力信号の滑らかさ、データ数および観測雑音の分散（あるいはSN比）との関係を解析し、入力信号が滑らかでデータ数が少ないときの最小二乗推定値の劣化の原因を明らかにする。特異値分解は、行列のランクを数値的に安定に決定する方法として知られており⁽⁶⁾、さまざまな分野^{(7)~(9)}への適用可能性を秘めた手法であり、本論文では、入力信号の滑らかさの定量的な指標として、入力信号の相関行列を特異値分解して得られる特異値の大きさを利用している（この相関行列は正定対称行列なので、特異値分解は固有値展開と等価になり、以下では、固有値、固有値展開という用語を使用する）。入力信号が滑らかでデータ数が有限個の場合に、適当な個数の小さな固有値を0とおいて打ち切ることによって、同定誤差が改善されることを明らかにし、データ数、固有値およびSN比などで決まる最適な個数の固有値を用いたインパルス応答の新しい同定法を提案する。

まず、データを一括処理して推定値を求めるアルゴリズムを導出し、次に、各時刻で推定値を求めを逐次同定アルゴリズムへ拡張する。本手法は、厳密に言えば、逐次形式ではないが、各時刻における固有値、固有ベクトルを逐次的にベキ乗法を用いて時間更新し、それらを用いて、インパルス応答の推定値を計算しよ

[†]慶応義塾大学理工学部電気工学科、横浜市
Faculty of Science and Technology, Keio University,
Yokohama-shi, 223 Japan

うとするものである。また、本手法には、各時刻で固有値の最適個数を求める更新アルゴリズムも含まれている。本手法の1時刻当りの計算量は、逐次最小二乗法と比較すると増加するが、滑らかな入力信号に対して非常に有効な同定法であることを、理論的解析および計算機シミュレーションを通して明らかにする。

2. 問題の定式化

次式で与えられる離散時間システムを考える。

$$y_k = H(q^{-1})u_k + w_k \quad (1)$$

ただし、 $\{u_k\}$ は入力信号、 $\{y_k\}$ は出力信号、 $\{w_k\}$ は入力信号と独立な平均値0、分散 σ_w^2 の正規性白色雑音系列とする。また、 $H(q^{-1})$ はシステムのインパルス応答 $\{h_i\}$ を係数としてもつ、時間遅れ演算子 q^{-1} の多項式

$$H(q^{-1}) = h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_{n-1} q^{-n+1}$$

である。本論文では、有限のデータ数 N の入出力データ $\{u_k, y_k; k=1, 2, \dots, N\}$ に基づいて、システムのインパルス応答の係数パラメータ

$$\theta_* = [h_0, h_1, \dots, h_{n-1}]^T \quad (2)$$

を同定する問題を考える。

3. 最小二乗法によるインパルス応答の同定

式(1)は、次式のように書き直すことができる。

$$y_N = U_N \theta_* + w_N \quad (3)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} y_N &= (y_1, y_2, \dots, y_N)^T \\ w_N &= (w_1, w_2, \dots, w_N)^T \\ U_N &= (u_1, u_2, \dots, u_N)^T \\ u_k &= (u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-n+1})^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、データ数 N の入出力信号に基づく誤差評価を

$$J_N(\hat{\theta}_N) = \|y_N - U_N \hat{\theta}_N\|^2 \quad (5)$$

にとると、これを最小にする係数パラメータ θ_* の最小二乗推定値 $\hat{\theta}_N$ は、正規方程式

$$F_N \hat{\theta}_N = g_N \quad (6)$$

を満足す。ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表わし、また F_N 、 g_N はそれぞれ $(n \times n)$ 行列、 n 次元ベクトルであり、次式で与えられる。

$$F_N = U_N^T U_N / N \quad (7)$$

$$g_N = U_N^T y_N / N \quad (8)$$

式(5)から最小二乗推定値 $\hat{\theta}_N$ を求める方法として、 N 個のデータを一括処理する方法と逆行列補題を用いて各時刻における推定値 $\hat{\theta}_k$ ($k=1, 2, \dots, N$)を逐次的に求める方法(逐次最小二乗法: RLS法)とに大別

される。しかし、システムへの入力信号が滑らか、すなわち、有色性である場合には、特にRLS法を用いて同定を行うと、得られた推定値のパラメータ誤差が非常に大きくなってしまふことが報告されている⁽²⁾。

本章では、固有値展開の考えを用いて、入力信号が滑らかな場合、最小二乗法によって得られる推定値の劣化の原因を明らかにする。まず、最小二乗推定値 $\hat{\theta}_N$ が、式(6)において F_N^{-1} を両辺の左側から乗ずることにより得られるものとする、

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= F_N^{-1} g_N \\ &= F_N^{-1} (F_N \theta_* + \tilde{w}_N) \\ &= \theta_* + F_N^{-1} \tilde{w}_N \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ただし、 \tilde{w}_N は次式で与えられる。

$$\tilde{w}_N = U_N^T w_N / N$$

ここで、パラメータ誤差 e_N を

$$e_N \triangleq \theta_* - \hat{\theta}_N \quad (10)$$

と定義すると、パラメータ推定値の平均二乗誤差は、

$$E \|e_N\|^2 = E \|F_N^{-1} \tilde{w}_N\|^2 \quad (11)$$

となる。ただし、 E は期待値を表わし、雑音系列に関してとられるものとする。式(11)を式(4)、(7)、(8)を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} E \|e_N\|^2 &= \text{tr} \{ F_N^{-2} \cdot E \{ \tilde{w}_N \tilde{w}_N^T \} \} \\ &= \frac{1}{N^2} \text{tr} \{ F_N^{-2} U_N^T (\sigma_w^2 I) U_N \} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{N} \text{tr} F_N^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。式(12)中の行列 F_N は、 $N \rightarrow \infty$ のとき、入力信号の自己相関行列(F_* と定義する)になるので、データ数 N における F_* の推定値と考えられる。本論文では、入力信号の統計性は、行列 F_N の性質に反映される点に着目し、この行列 F_N を次式のように固有値展開することにより、式(12)で与えられた平均二乗誤差の解析を行う。

$$F_N = V_N A_N V_N^T = \sum_{i=1}^n \lambda_N(i) v_N(i) v_N(i)^T \quad (13)$$

ただし、 V_N は、

$$V_N = [v_N(1), v_N(2), \dots, v_N(n)]$$

で与えられ、 $V_N V_N^T = V_N^T V_N = I$ を満たす $(n \times n)$ 直交行列である。また、 A_N は

$$A_N = \text{diag} \{ \lambda_N(1), \lambda_N(2), \dots, \lambda_N(n) \}$$

ただし、 $\lambda_N(1) \geq \lambda_N(2) \geq \dots \geq \lambda_N(n) > 0$

で与えられる $(n \times n)$ 対角行列である。ここで、 $\lambda_N(i)$ はベクトル $v_N(i)$ に対応する行列 F_N の固有値である。さらに、行列 F_N の逆行列は、次式のように表すこと

ができる。

$$F_N^{-1} = V_N A_N^{-1} V_N^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_N(i)} v_N(i) v_N(i)^T \quad (14)$$

式(14)を用いると、式(12)の平均二乗誤差は、次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} E \|e_N\|^2 &= \frac{\sigma_w^2}{N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_N(i)} v_N(i)^T v_N(i) \\ &= \frac{\sigma_w^2}{N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_N(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)より、パラメータ推定値の平均二乗誤差 $E \|e_N\|^2$ は、データ数 N が無限大に向かうとき、0 に収束するが、 N が有限のときには、雑音系列の分散、データ数および行列 F_N の固有値 $\lambda_N(i)$ ($i=1, \dots, n$) に依存することがわかる。たとえば、入力信号が白色性の場合には、自己相関行列 F_* は、 $F_* = \sigma_u^2 I$ (ただし、 σ_u^2 は入力信号の分散) となるので、 F_n のすべての固有値は、ほぼ σ_u^2 に等しくなる。したがって、式(15)より、

$$E \|e_N\|^2 \simeq \frac{n}{N} \sigma_w^2 \sigma_u^2$$

が得られる。しかし、滑らかな入力信号の場合には、行列 F_* の固有値の広がりが大きくなり、小さな値の固有値を含むために、式(15)より、平均二乗誤差の値は大きくなってしまふ。すなわち、滑らかな入力信号に対して最小二乗法を適用すると、行列 F_N の小さな固有値の影響で推定が劣化すると考えられる。

4. 固有値の打ち切りを用いた同定法

前章で説明したように、行列 F_N が小さな固有値を含むために推定二乗誤差が劣化するので、本章では、これらの小さな値の固有値を 0 とおいて打ち切ることにより、パラメータの平均二乗誤差を小さくする新しいインパルス応答の同定法を提案する。すなわち、行列 F_N はフルランクであるが、ランク落ちした特異行列とみなして考えていくことにする。

4.1 固有値打ち切りによる推定値の性質

次式のように小さな値の固有値を 0 とおいて打ち切ることとする。

$$\lambda_N(1) \geq \dots \geq \lambda_N(m) > \lambda_N(m+1) = \dots = \lambda_N(n) = 0 \quad (m < n)$$

これは、行列 F_N の打ち切り個数 m における近似値として、次の特異行列 $F_N^{(m)}$ を用いることに対応する。

$$F_N^{(m)} = V_N A_N^{(m)} V_N^T = \sum_{i=1}^m \lambda_N(i) v_N(i) v_N(i)^T \quad (16)$$

ただし、

$$A_N^{(m)} = \text{diag} \{ \lambda_N(1), \dots, \lambda_N(m), 0, \dots, 0 \}$$

さらに、行列 $F_N^{(m)}$ の Moore-Penrose 型一般化逆行列を $F_N^{(m)+}$ と定義すると、次式のように表すことができる。

$$F_N^{(m)+} = V_N A_N^{(m)+} V_N^T = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_N(i)} v_N(i) v_N(i)^T \quad (17)$$

ただし、

$$A_N^{(m)+} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_N(1)}, \dots, \frac{1}{\lambda_N(m)}, 0, \dots, 0 \right\}$$

式(16)で与えられた近似値 $F_N^{(m)}$ と行列 F_N の間の距離としてフロビニアスノルム $\|\cdot\|_F$ を採用すると、これは次式により評価できる。

$$\|F_N\|_F - \|F_N^{(m)}\|_F \leq \left(\sum_{i=m+1}^n \{\lambda_N(i)\}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

すなわち、 $\lambda_N(i)$ 、($i=m+1, \dots, n$) の値が小さければ、行列 $F_N^{(m)}$ はフロビニアスノルムの意味で F_N に近いといえる。

本論文では、式(17)の行列 $F_N^{(m)+}$ を用いて、インパルス応答の推定値を次式より求める方法を提案する。

$$\hat{\theta}_N^{(m)} = F_N^{(m)+} \theta_N \quad (18)$$

このときのパラメータ誤差を

$$e_N^{(m)} = \theta_* - \hat{\theta}_N^{(m)} \quad (19)$$

と定義し、前章と同じようにパラメータ推定値の平均二乗誤差について検討していく。式(18)は、

$$\hat{\theta}_N^{(m)} = F_N^{(m)+} F_N \theta_* + F_N^{(m)+} \tilde{w}_N$$

と書き直せるので、平均二乗誤差は次のように書ける。

$$E \|e_N^{(m)}\|^2 = E_i^{(m)}(N) + E_n^{(m)}(N) \quad (20)$$

ただし、

$$E_i^{(m)}(N) = \| (I - F_N^{(m)+} F_N) \theta_* \|^2 \quad (21)$$

$$E_n^{(m)}(N) = E \| F_N^{(m)+} \tilde{w}_N \|^2 \quad (22)$$

すなわち、平均二乗誤差は、打ち切りによる項 $E_i^{(m)}(N)$ と雑音による項 $E_n^{(m)}(N)$ とに分けて考えることができる。前章の結果と比較すると、新たに打ち切りによる項が生じているが、雑音による項の値を小さくすることができれば、式(20)を式(15)より小さくすることが期待できる。

まず、式(21)の $E_i^{(m)}(N)$ について考えていく。式(21)は、
$$E_i^{(m)}(N) = \theta_*^T (I - 2F_N^{(m)+} F_N + F_N^{(m)+} F_N + F_N^{(m)+} F_N) \cdot \theta_* \quad (23)$$

と変形できるが、式(13)、(17)を用いると、次の2式を導くことができる。

$$F_N^{(m)+} F_N = V_N A_N^{(m)+} V_N^T \cdot V_N A_N^{(m)+} V_N^T$$

$$= V_N A_N A_N^{(m)+} V_N^T$$

$$F_N^{(m)+} F_N + F_N^{(m)+} F_N = V_N A_N A_N^{(m)+} A_N^{(m)+} A_N V_N^T$$

$$= V_N A_N A_N^{(m)+} V_N^T$$

ここで、 $A_N A_N^{(m)+}$ は次の形の行列である。

$$A_N A_N^{(m)+} = \text{diag} \{ \underbrace{1, \dots, 1}_m, 0, \dots, 0 \}$$

これらの式を用いると、式(23)は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} E_t^{(m)}(N) &= \theta_*^T (I - V_N A_N A_N^{(m)+} V_N) \theta_* \\ &= \theta_*^T \left\{ I - \sum_{i=1}^m v_N(i) v_N(i)^T \right\} \theta_* \\ &= \theta_*^T \left\{ \sum_{i=m+1}^n v_N(i) v_N(i)^T \right\} \theta_* \\ &= \sum_{i=m+1}^n \{ \theta_*^T v_N(i) \}^2, \quad m < n \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)より、 $E_t^{(m)}(N)$ の値はインパルス応答の直値 θ_* に依存するが、データ数 N には陽に依存していないことがわかる。すなわち、行列 F_N の各要素の値が N に対してほぼ一定値と見なせる程度にデータ数 N が大きければ、 $E_t^{(m)}(N)$ の値は固定された m に対して、一定であるとみなせる。また、 $m = n$ 、すなわち、打ち切りを行わないときには、 $E_t^{(m)}(N)$ の値は常に 0 に等しくなる。

次に、式(22)の $E_n^{(m)}(N)$ の値は次のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned} E_n^{(m)}(N) &= E \{ \tilde{w}_N^T V_N A_N^{(m)+} A_N^{(m)+} V_N^T \tilde{w}_N \} \\ &= \text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{1}{\{\lambda_N(i)\}^2} v_N(i) v_N(i)^T \right. \\ &\quad \cdot E \{ \tilde{w}_N \tilde{w}_N^T \} \left. \right\} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_N(j)}{\{\lambda_N(i)\}^2} \{ v_N^T(i) v_N(j) \}^2 \\ &= \frac{\sigma_w^2}{N} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_N(i)} \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)で、 $m = n$ とすると、前章で導出された式(15)に一致する。式(25)より、 $E_n^{(m)}(N)$ の値は、雑音の分散 σ_w^2 、データ数 N および F_N の固有値 $\lambda_N(i)$ 、($i = 1, \dots, m$) に依存する。

式(24)、(25)より、パラメータ推定値の平均二乗誤差は次のように与えられることが導びかれた。

$$E \| e_N^{(m)} \|^2 = \sum_{i=m+1}^n \{ \theta_*^T v_N(i) \}^2 + \frac{\sigma_w^2}{N} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_N(i)} \quad (26)$$

以上より、固定されたデータ数 N に対して、 $E_t^{(m)}(N)$ の値は、 m が増加するにしたがって減少するが、 $E_n^{(m)}(N)$ の値は、 m が増加するにしたがって増加することがわかる。すなわち、あるデータ数 N に対して、

$E \| e_N^{(m)} \|^2$ の値を最小にする最適な m が存在する。最適な m は、固有値、データ数、雑音の分散およびパラメータの真値 θ_* より決まるが、これらは事前には一般に未知であるので、実時間で逐次推定し、更新していく必要がある。以下では、その方法について述べる。

4.2 推定値の逐次計算法

本節では、厳密に言えば、逐次同定法ではないが、各時刻において前節で提案した推定値を求めるアルゴリズムを導出する。すなわち、各時刻における行列 F_k の固有値、固有ベクトルを逐次的に求める方法を用いて、パラメータ推定値を計算する。

一般に、 $(n \times n)$ 行列 A の固有値、固有ベクトルを求める反復解法として、次のようなベキ乗法を利用した直交化法が知られている¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} \xi_j^{(i)} &= A \zeta_{j-1}^{(i)} \\ \eta_j^{(i)} &= \left[I - \sum_{k=1}^{i-1} \zeta_k^{(i)} \zeta_k^{(i)T} \right] \xi_j^{(i)} \\ \text{ただし、} \quad \eta_j^{(1)} &= \xi_j^{(1)} \\ \zeta_j^{(i)} &= \frac{\eta_j^{(i)}}{\|\eta_j^{(i)}\|} \\ \sigma_j^{(i)} &= \zeta_{j-1}^{(i)T} \xi_j^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ただし、 j は繰返しの回数である。式(27)の手順を繰返し計算すると、行列 A の固有値 $\sigma^{(i)}$ と固有ベクトル $\zeta^{(i)}$ が求まる。このアルゴリズムの収束率は、たとえば、 $i = 1$ のとき、すなわち、 $\sigma^{(1)}$ を求めるとき、次式より評価できる。

$$\sigma_j^{(1)} = \sigma^{(1)} + 0 \left(\left| \frac{\sigma^{(2)}}{\sigma^{(1)}} \right|^{2j} \right) \quad (28)$$

ただし、 $\sigma^{(1)}$ 、 $\sigma^{(2)}$ はそれぞれ、行列 A の最大絶対値をもつ固有値と 2 番目に絶対値の大きな固有値である。式(28)より、 $\sigma^{(2)}/\sigma^{(1)}$ の比の値が小さいときほど、収束率が良いことがわかる。本論文では、固有値の広がり大きな行列について考えているので、このアルゴリズムを用いて、固有値、固有ベクトルを推定できることが期待される。

(a) パラメータ推定値 $\hat{\theta}_k^{(m)}$ の計算

固有値を求める行列 F_k は、入力信号データにより、時々刻々変動するので、各時刻において式(27)の反復を行うと計算量は増大してしまう。そこで、ここでは計算量を低減化するために、各時刻 k において、次のように 1 回だけ反復を行うことにより固有値、固有ベクトルを時間更新するアルゴリズムを用いる。

$$F_k = \{ (k-1) F_{k-1} + u_k u_k^T \} / k, \quad F_0 = 0 \quad (29)$$

$$p_k(i) = F_k \hat{\theta}_{k-1}(i) \quad (30)$$

$$q_k(i) = \left[I - \sum_{j=1}^{i-1} \hat{v}_k(j) \hat{v}_k(j)^T \right] p_k(i) \quad (31)$$

ただし, $q_k(1) = p_k(1)$

$$\hat{v}_k(i) = \frac{q_k(i)}{\|q_k(i)\|} \quad (32)$$

$$\hat{\lambda}_k(i) = \hat{v}_{k-1}(i)^T p_k(i) \quad (33)$$

$(i = 1, 2, \dots, m)$

式(29)~(33)より計算された固有値, 固有ベクトルの推定値 $\hat{\lambda}_k(i)$, $\hat{v}_k(i)$ を次式で用いることによって, 各時刻における推定値 $\hat{\theta}_k^{(m)}$ を計算することができる。

$$\hat{\theta}_k^{(m)} = \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{1}{\hat{\lambda}_k(i)} \hat{v}_k(i) \hat{v}_k(i)^T \right\} g_k \quad (34)$$

ただし, ベクトル g_k は次式で時間更新される。

$$g_k = \{(k-1)g_{k-1} + y_k u_k\} / k,$$

$$g_0 = 0$$

式(29)~(33)のアルゴリズムでは, オーバーフローやけた落ちが生じないように正規化を行っている。また, 行列 F_k は, $k \rightarrow \infty$ のとき F_* に収束するので, このアルゴリズムで推定された $\hat{\lambda}_k$, \hat{v}_k はそれぞれ, $k \rightarrow \infty$ のとき, F_* の固有値, 固有ベクトルに収束する。

(b) 最適打ち切り個数 m の決定法

次に, 最適な打ち切り個数 m は, 各時刻 k (N の代わりに k を用いる) において, 式(29)の $E \| e_k^{(m)} \|^2$ の値を最小にするように決定すればよい。式(29)中の固有値 λ_k および固有ベクトル v_k は, (a)で求めたそれらの推定値 $\hat{\lambda}_k$, \hat{v}_k で代用できる。また, 真値 θ_* は, その時刻の 1 時刻前で得られている推定値 $\hat{\theta}_{k-1}^{(m)}$, あるいは, 時間的変動を抑える意味で, 過去 l 個の推定値の平均値

$$\bar{\theta}_{k-1} \triangleq \frac{1}{l} \sum_{i=k-l}^{k-1} \hat{\theta}_i^{(m)}$$

を利用すればよい。さらに, 分散 σ_w^2 は,

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{l} \sum_{i=k-l}^{k-1} (y_i - \hat{\theta}_i^{(m)T} u_i)^2$$

を利用する。以上のように, 各時刻でそれぞれの推定値を用いて計算される平均二乗誤差の推定値

$$\hat{\varepsilon}_k^{(m)} = \sum_{i=m+1}^n \{ \bar{\theta}_{k-1}^T \hat{v}_k(i) \}^2 + \frac{\hat{\sigma}_w^2}{k} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\hat{\lambda}_k(i)} \quad (35)$$

を最小にする m を求めればよい。実際にすべての m について式(35)を計算することは, 計算量の点からみて得策ではないので, 前時刻で選択された m の前後 $m-1$, m , $m+1$ の計 3 つについて, 式(35)の値を比較して, 現時刻の m を決める。また, 同定開始時においては, $m = n$ と設定する。

表 1 計算量の比較

	乗算回数/時刻
逐次最小二乗法	$3n^2 + 4n + 1$
本手法	$\left(\frac{m^2 + 5m + 4}{2} \right) n^2 + (2m + 1)n$

最後に, 各時刻における計算量 (乗算回数で評価) について触れておこう。表 1 に示すように, 本手法は, 逐次最小二乗法より計算量は増大するが, 後述の数値例で示すように極めて優れた収束性をもつことが明らかにされる。また, m が大きくなるにつれて, 本手法の計算量は増大するが, この意味においても, 式(35)を最小にする m を各時刻で選ぶことは重要な意味をもつ。

5. 数値例

本章では, 前章で提案した同定アルゴリズムがもつ性質を明らかにするため, 計算機による数値例を通して最小二乗法との比較, 検討を行う。

滑らかな入力信号系列に対する本同定法の有効性を確かめるために, 次のような入力系列を利用する。まず, 平均値 0 で適当な分散をもつ正規乱数系列を発生させ, この系列を次式で与えられる移動平均フィルタ

$$B(q^{-1}) = 0.894 + 0.401q^{-1} + 0.181q^{-2} + 0.0813q^{-3} + 0.0366q^{-4} + 0.0161q^{-5}$$

に何回か繰返し通して得られた有色信号系列を考える。移動平均の回数を L とし, $L = 1, 4, 7$ の場合の入力信号を図 1 で示した (ただし, $\sigma_u^2 = 1$ とした)。

次に, システムのインパルス応答の真値を, $\theta_* = [1.0, 0.82, 0.67, 0.55, 0.45, 0.37, 0.30, 0.25, 0.20, 0.17, 0.14, 0.11, 0.09]^T$ とし, $n = 13$ とする。また, 出力信号 $\{y_k\}$ には平均値 0, 分散 $\sigma_w^2 = 0.01$ の白色性雑音加わるものとする。このとき, 自己相関行列 F_* の各要素の値は, 移動平均フィルタの係数から決定でき, $L = 1, 4, 7$ の場合の F_* のすべての固有値を表 2 に示した。表 2 より, $L = 7$ の場合には 10^{-5} のオーダーの小さな固有値を含むことがわかる。データ数 1,000 のとき, 式(15)より求める平均二乗誤差の理論値と実際に 1,000 個の入出力データに基づいて求めた式(9)の最小二乗推定値の平均二乗誤差 (雑音系列の異なるサンプル数 20 個の平均を用いた) をそれぞれ L ($L = 0, 1, \dots, 7$) について表 3 で比較した。また, 相関行列の条件数 (最大固有値と最小固有値の比) も記した。表 3 より, 滑らかな入力を利用する程, 二乗推定誤差が大きくなり (本例

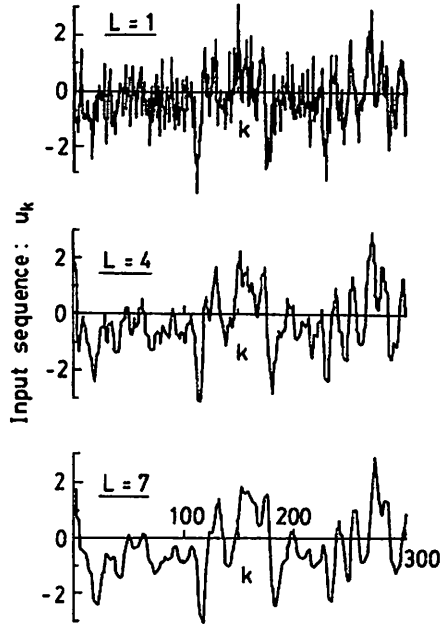


図1 入力信号系列
Fig.1 Input signal sequence.

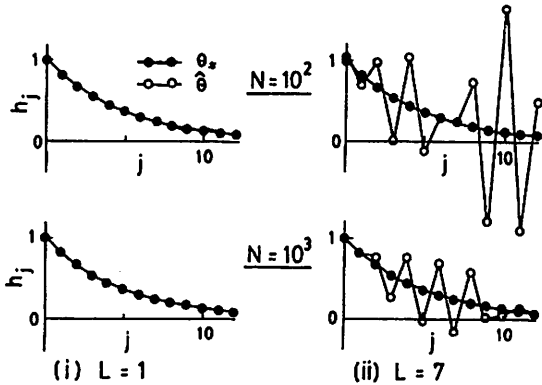


図2 入力信号の滑らかさと最小二乗推定値の関係
Fig.2 The relation between the smoothness of the input signals and least squares estimates.

では、 $L=7$ のとき、 $L=1$ の場合 10^4 倍になる)、従来の最小二乗法では満足な推定値が得られないことがわかる。実際、インパルス応答の推定波形を図2に示したが、白色性に近い入力の場合($L=1$)には、少ないデータ数でも正しい推定値が得られているが、滑らかな入力($L=7$)の場合は推定値が正しく求まらないことがわかる。

次に、固有値の打ち切りを用いた本手法において、打ち切り個数 m と二乗推定誤差の関係を図3、図4に示した。式(8)の右辺第2項は、小さな固有値が存在する程、大きくなるため、 L が大きい程(有色性入力)、

表2 入力の滑らかさと相関行列 F_* の固有値の関係

	$L=1$	$L=4$	$L=7$
$\lambda(1)$	2.46×10^0	6.13×10^0	7.69×10^0
$\lambda(2)$	2.13×10^0	3.80×10^0	3.71×10^0
$\lambda(3)$	1.72×10^0	1.82×10^0	1.21×10^0
$\lambda(4)$	1.33×10^0	7.36×10^{-1}	3.01×10^{-1}
$\lambda(5)$	1.04×10^0	2.83×10^{-1}	6.51×10^{-2}
$\lambda(6)$	8.42×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.41×10^{-2}
$\lambda(7)$	7.02×10^{-1}	5.39×10^{-2}	3.47×10^{-3}
$\lambda(8)$	5.93×10^{-1}	2.68×10^{-2}	9.86×10^{-4}
$\lambda(9)$	5.11×10^{-1}	1.39×10^{-2}	2.98×10^{-4}
$\lambda(10)$	4.58×10^{-1}	8.12×10^{-3}	9.87×10^{-5}
$\lambda(11)$	4.25×10^{-1}	5.65×10^{-3}	4.31×10^{-5}
$\lambda(12)$	4.02×10^{-1}	4.36×10^{-3}	2.44×10^{-5}
$\lambda(13)$	3.83×10^{-1}	3.50×10^{-3}	1.57×10^{-5}

表3 入力の滑らかさとパラメータ推定値の二乗推定誤差の関係

L	条件数 $\lambda(1)/\lambda(13)$	二乗推定誤差: $E \ e_{1000} \ ^2$	
		理論値	測定値
0	1.00×10^0	1.30×10^{-4}	1.19×10^{-4}
1	6.99×10^0	1.91×10^{-4}	1.71×10^{-4}
2	3.76×10^1	5.25×10^{-4}	4.42×10^{-4}
3	1.92×10^2	2.06×10^{-3}	1.65×10^{-3}
4	1.41×10^3	9.58×10^{-3}	7.66×10^{-3}
5	1.14×10^4	4.83×10^{-2}	3.80×10^{-2}
6	7.38×10^4	2.56×10^{-1}	1.94×10^{-1}
7	4.90×10^5	1.43×10^0	2.03×10^0

右辺第1項と第2項の和を最小にする最適な打ち切り個数 m は小さい方へシフトすることが予想され、図3の結果はこれを裏付けている。また、同様に右辺第2項はデータ数 N に反比例することから、 N が大きくなる程、最適な m は図4に示すように大きい方へシフトし、 $N \rightarrow \infty$ のとき、全部の固有値が採用されることが予想される。

滑らかな同定入力信号に対処した方法は少なく、ここでは次に示す最急降下法を利用した文献(2)の方法と比較する。

$$(i) \hat{\theta}_N^{(j+1)} = \hat{\theta}_N^{(j)} + 2r \phi_N^{(j)}$$

$$\phi_N^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i (y_i - u_i^T \hat{\theta}_N^{(j)})$$

(ii) 式(5)より、

$$J_N(\hat{\theta}_N^{(j+1)}) \triangleq J_N^{(j+1)} = \sum_{i=1}^N (y_i - u_i^T \hat{\theta}_N^{(j+1)})^2$$

を計算し、 $J_N^{(j+1)} < J_N^{(j)}$ であれば、 $j = j+1$ として(i)へ戻り、 $J_N^{(j+1)} \geq J_N^{(j)}$ であれば、 $\hat{\theta}_N^{(j+1)}$

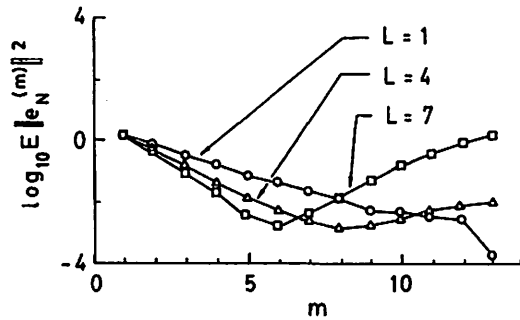


図3 入力信号の滑らかさと二乗推定誤差の関係 ($N=1,000$)

Fig.3 The relation between the smoothness of input signals and the mean square errors of estimates.

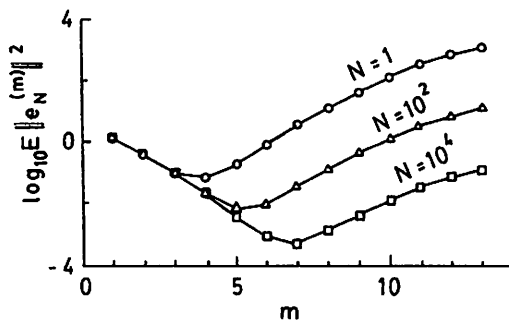


図4 データ数と二乗推定誤差の関係 ($L=7$)
Fig.4 The relation between the number of data and the mean squares errors of estimates.

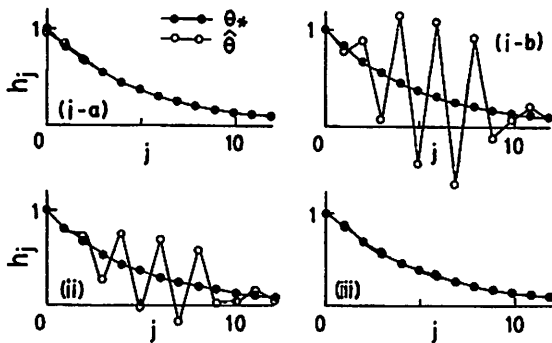


図5 本手法と他の同定法の比較
(i)最急降下法 (ii)最小二乗法 (iii)本手法
Fig.5 Comparison of the identification results using the smooth input signal.

を採用せず, $r = 0.9 \times r$ として(i)へ戻る.

この方法は N 個のデータを一括処理して反復的に推定値を求めるもので, 上添字 (j) は繰返しの回数を表わす. $N=1,000$ として滑らかな入力 ($L=7$) の場合に, (i)最急降下法⁽²⁾, (ii)最小二乗法 (式(9)を用いた), (iii)

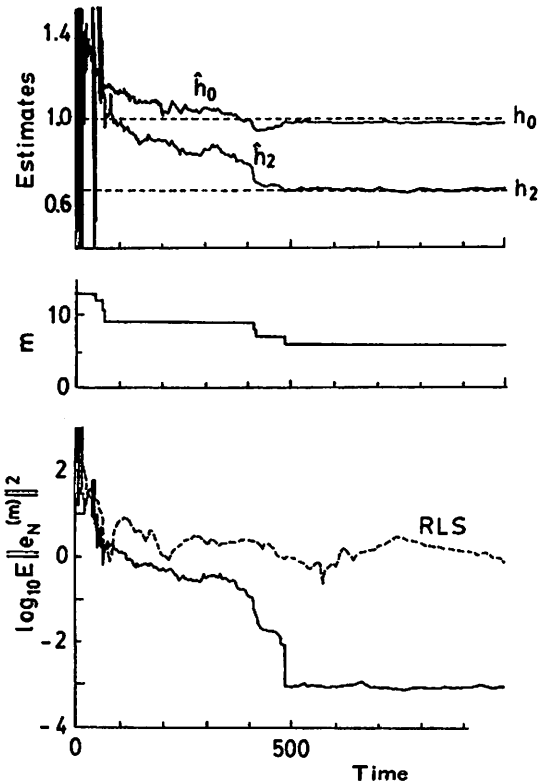


図6 本同定法による収束過程の例
Fig.6 A example of the convergence property obtained by using the proposed identification method.

本手法 (式(10)を用い, $m=6$ とした) を比較したものが図5である. 図5の (i-a) は推定値の初期値 $\hat{\theta}_N^{(0)}$ を 0 とおいた場合であり, このときには良好な結果が得られたが, 異なる初期値を用いると (i-b) のように正しく推定値が求められない場合がある. すなわち, 最終的に得られた $J_N^{(j)}$ の値がほぼ等しくとも, 推定値は全く異なったものとなり, どれが真の推定値であるかを判定できない. 式(5)の誤差評価の最小値 (最小値は最小二乗推定値に対応する) の手前で停めてしまおうとするこの手法の特徴が, 逆に本質的に重大な弱点となっている. また, 滑らかな入力になる程, 反復回数が膨大になる問題点も持つ. それに対して本手法は, 提案した打ち切り個数の決定法を用いて適正な m を選択すれば, 図5の (iii) に示すように優れた推定値が一意的に求まり, 時間更新形式であるため実時間処理に向いている.

最後に, 打ち切り個数 m を各時刻で自動的に調整する逐次推定法による結果を, 滑らかな同定入力 ($L=7$) を用いて従来の逐次最小二乗法 (RLS法) と比較したものが図6である. インパルス応答のパラメータ

のうち h_0 と h_1 の推定の経移と m の値の変化, および二乗推定誤差の経移を図示した. ここで $l=20$, $l'=100$ とした. また, 時刻 50 までは $m=n(=13)$ とおき, その後は式(5)を最小とする m を求めている. m の値は時刻 1,000 において $m=6$ となっており, これは前述した理論的な最適値と一致している. 従来の RLS 法と比較して, 本手法の有効性が理解される.

6. む す び

本論文では, 滑らかな入力を用いたインパルス応答の最小二乗推定における収束性の劣化の原因を, 固有値展開の考え方を用いて解析し, 小さな固有値を打ち切る新しい逐次同定法を提案した. 二乗推定誤差を最小にする固有値の最適個数を各時刻で推定するアルゴリズムと組合せ, 従来の逐次最小二乗法よりも極めて優れた収束性をもつことを明らかにした. 本手法は IIR 形の入出力特性の同定にも拡張できるため, 適用範囲は広いと思われる. 最後に, 本手法では滑らかな同定入力信号に対する同定精度の向上を第一の目的としたため, 表 1 に示したように RLS 法と比べて計算量がかなり増大した. これを低減化するアルゴリズムの改善は今後の課題の一つとして現在検討している.

文 献

- (1) L. Ljung and T. Söderström: "Theory and Practice of Recursive Identification", MIT Press (1983).
- (2) 小林, 山浦, 曾我: "最急降下法による荷重関数波形の同定", 電学論, 100-C, pp.159-166 (昭55).
- (3) 野田, 南雲: "システムの学習的同定法", 計測と制御, 7, pp.597-605 (昭43).
- (4) 鎌元, 前川: "拡張された学習的同定法", 電学論, 95-C, pp.227-234 (昭50).
- (5) G.W. Stewart: "Introduction to Matrix Computations", Academic Press (1973).
- (6) V.C. Klema and A.J. Laub: "The singular value decomposition: Its computation and some applications", IEEE Trans., AC-25, 2, pp.164-176 (1980).
- (7) G.H. Golub and C.Reinsch: "Singular value decomposition and least squares solution", Numer. Math., 14, pp.403-420 (1970).
- (8) B. J. Sullivan and B. Liu: "On the use of singular value decomposition and decimation in discrete-time band-limited signal extrapolation", IEEE Trans., ASSP-32, 6, pp.1201-1212 (1984).
- (9) S. Kung and D.W. Lin: "Optimal Hankel-norm model reductions: multivariable systems", IEEE Trans., AC-26, 4, pp.832-852 (1981).

(10) ファジューエフ, ファジューエバ, 小国訳: "線型代数の計算法", 産業図書 (昭45).

(昭和60年2月22日受付, 5月16日再受付)



足立 修一

昭和 56 年慶応義塾大学工学部電気工学科卒業. 昭和 58 年同大学院工学研究科修士課程修了. 現在, 同大学院後期博士課程在学中. システム制御理論, デジタル信号処理に関する研究に従事している. 計測自動制御学会, 電気学会などの会員.



伊原木正裕

昭和 60 年慶応義塾大学理工学部電気工学科卒業. 同年同大学院修士課程入学. デジタル信号処理及びシステム同定に興味を持つ.



佐野 昭

昭和 41 年東京大学工学部計数工学科卒業. 46 年東京大学大学院博士課程修了. 工学博士. 同年慶応義塾大学工学部電気工学科助手. 51 年助教授, 60 年教授. システム同定, 適応制御などのシステム制御理論, デジタル信号処理, および生体医用工学とくに生体治療制御などの研究に従事. 著書に「基礎システム理論」(共著)など. 日本ME学会, 計測自動制御学会, 電気学会などの会員.